Lycée Laymoune BERKAN
Prof. YAZOUGH MOHAMED

◇26-03-2020◇

★ Etude analytique de l'espace ★

Leçon n°: 12 — 2ème B.P.M.V.A

① Repérage dans l'espace (المعلمة في الفضاء)

Coordonnées : (الإحداثيات)

Déf : on appel repère de l'espace tout quadruplet : $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec :

- O un point de l'espace.
- $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaire (pas dans le même plan (غير مستوائية)

et on a :

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthogonal (متعامد) $\Leftrightarrow$ les droites (Ox), (Oy) et (Oz) sont perpendiculaires

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormal (متعامد ممنظم) $\Leftrightarrow$ (O,i,j,k) orthogonal et : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

(Oz) l'axe des cotes محور الأناسيب

$\vec{k}$ — O — $\vec{j}$ — (Oy) l'axe des ordonnées (محور الأراتيب)

$\vec{i}$ — (Ox) l'axe des abscisses (محور الأفاصيل)

Thm : a) • Soit M un point de l'espace.

$\exists (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z.\vec{k}$

et on écrit $M(x;y,z)$.

• Le triplet (x,y,z) est appelé : coordonnées de M.

b) • Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.

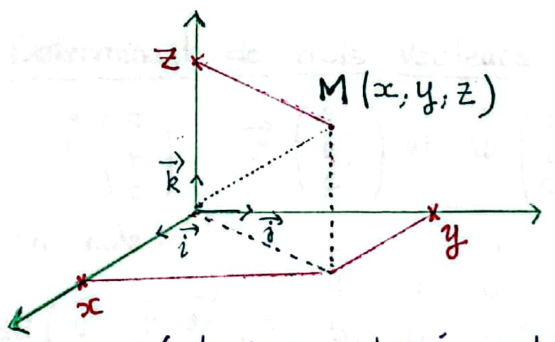
$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \vec{u} = a.\vec{i} + b\vec{j} + c.\vec{k}$

• Le triplet (a,b,c) est appelé : coordonnées de $\vec{u}$ et on note :

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

★ **Exemple :** • le point $A(1,-1,0)$ s'écrit autrement : $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - \vec{j}$

• $\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



on écrit M(abscisse ; ordonnée ; cote)

② Calcul sur les coordonnées.

a) Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ alors : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

b) Soit I le milieu du segment $[a;b]$.

on a : $I\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

c) si $\vec{u}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ et $\vec{v}\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}$

alors :

$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \\ c + c' \end{pmatrix}$ et pour tout

$\alpha \in \mathbb{R}$ on a : $\alpha . \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha . a \\ \alpha . b \\ \alpha . c \end{pmatrix}$

EX.1 A(3; 1; 5) ; B(2; 4; 0) et I est le milieu de [AB].

Déterminer les coordonnées de : I , $\vec{AB}$, $\vec{BA}$ et $\frac{1}{2}\vec{AB}$

③ Colinéarité de deux vecteurs. (استقامية متجهتين)

Déf : $\vec{u}, \vec{v}$ colinéaire $\Longleftrightarrow$ $(\exists k \in \mathbb{R})$; $\vec{u} = k . \vec{v}$

Prop : si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ on note T le tableau : $\begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{bmatrix}$ et on a :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaire (مستقيميتان)

ssi les sous déterminants extraits du tableau T sont tous nuls

C-à-d : $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$;

$\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$

Rappel : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = (x)(y') - (y)(x')$

Exemple : $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

on a : $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

on calcul les sous déterminants extraits (المحددات المستخرجة)

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (-6)(-1) = 6 - 6 = 0$

$\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-6)(4) - (2)(3) = -24 - 6 = -30$

$-30 \neq 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

! → On dit qu'ils sont : linéairement indépendant .

***Résultat .1** trois point A , B et C sont colinéaires **ssi** : $\vec{AB}$; $\vec{AC}$ colinéaires .

④ Déterminant de trois vecteurs.

si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$

on note :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} \overset{+}{a} & \overset{-}{a'} & \overset{+}{a''} \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

$$= + a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - a' \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & b'' \end{vmatrix} + a'' \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

***Exemple :** $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

on a :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= + 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - (-2) \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (0 - 12) + 2(0 - 12) + 2(6 - 0) = -12 - 24 + 12$$

$$= \boxed{-24}$$

5 Coplanarité de trois vecteurs
(إستوائية ثلاث متجهات)

Prop: $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}$ coplanaires (dans le même plan) ssi $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$

Exemple: $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}; \vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}; \vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

montrons que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

On a: $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\3 & 2 & 1\\1 & 1 & 0\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 0\end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{vmatrix}$

$= (0-1) - (0-1) + 0 = -1 + 1 = \boxed{0}$

donc $\vec{u}$ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires
(توجد في نفس المستوى)

Résultat . 2: Soient A, B, C et D 4 points de l'espace.
A, B, C et D sont coplanaire ssi $\vec{AB}, \vec{AC}$ et $\vec{BC}$ sont coplanaire.

6 Orthogonalité de deux vecteurs :
(تعامد متجهتين)

Le produit scalaire de $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et de $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ est le nombre réel noté est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a \times a' + b \times b' + c \times c'$$

et on a : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Exemple: $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}; \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\\5\end{pmatrix}$

a-t-on $\vec{u} \perp \vec{v}$?

Réponse: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(-2) + (-2)(-1) + (0)(5)$

$= -2 + 2 + 0 = 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

7 Représentation paramétrique d'une droite

Une droite (D) dans l'espace est déterminé par :
- un point $A(x_A; y_A; z_A) \in (D)$
- un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ (متجهة موجهة)

et on note : $D(A; \vec{u})$.

Déf
On appelle représentation paramétrique de (D) le système :

$$(D)\begin{cases} x = x_A + a.t \\ y = y_A + b.t \\ z = z_A + c.t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

où t est le paramètre.

Exemple: $(\Delta)\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = -5 + 7t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

est la représentation paramétrique de la droite passant par le point : $A(1; 3; -5)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$

EX.21 Donner un représentation paramétrique de la droite $D(A; \vec{u})$ dans chaque cas :

1°/ $A(-1; 2; 3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}$

2°/ $A(0; 1; 0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

3°/ $A(0; 0; 0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-4\\1/2\end{pmatrix}$.

nº 12

EX.3 On considère la droite :

$$(D) : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1°/ Donner deux points A et B appartenant à (D).

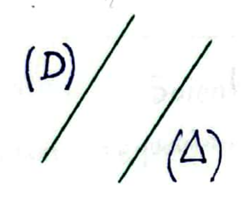
2°/ Donner un vecteur directeur de (D).

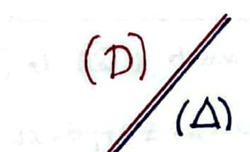
3°/ Soit $E(2; -1; 0)$. Est ce que $E \in (D)$?

⑧ Position relative de deux droites.

Il y a 4 cas possibles :

I)• (D) et (Δ) coplanaires (مُستوائيان) (et parallèles)

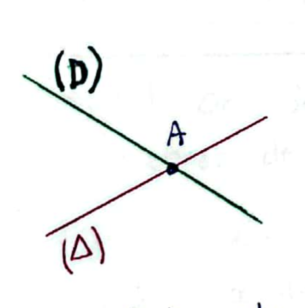




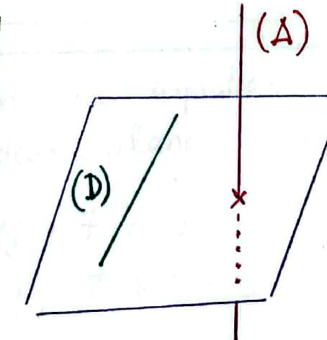
$(D) // (\Delta)$ (strictement) parallèle متوازيان (قطعا).

$(D) = (\Delta)$ ils sont confondues (منطبقان)

II)• (D) et (Δ) non parallèles :



(D) et (Δ) sont : sécantes (متقاطعان) et coplanaires



$(D) // (\Delta) \Leftrightarrow \vec{u}; \vec{v}$ colinéaires.

$(D) \perp (\Delta) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Req : ① si $(D) \cap (\Delta) = \phi$ alors :

(D) et (Δ) sont strictement parallèles ou confondues (voir les exercices)

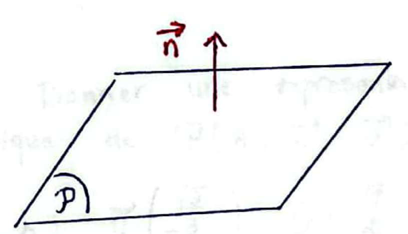
② si (D) et (Δ) ne sont pas parallèles alors :

(D) et (Δ) sont sécantes ou non coplanaires.

⑨ Equation cartésienne d'un plan :

Soient (P) un plan dans l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

Déf : $\vec{n}$ est normal (مَنْظَمِيّة) à (P) si : $\vec{n} \perp (P)$



Prop : (P) un plan passant par A $\vec{n}$ un vecteur normal à (P).

on a : $M \in (P) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

★ **Exemple :** Soit (P) un plan passant par $A(1; -2; 5)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ est normal à (P). Trouver une équation de (P).

Réponse : Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

on a $M \in (P) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

avec : $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-(1)\\y-(-2)\\z-(5)\end{pmatrix}$ donc $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+2\\z-5\end{pmatrix}$

puis : $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow 3(x-1) + 0(y+2) + 4(z-5) = 0$

$M \in (\mathcal{P}) \iff 3x + 4z - 3 - 20 = 0$

finalement : $(\mathcal{P}) : 3x + 4z - 23 = 0$

Thm et déf : Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tout plan $(\mathcal{P})$ admet une équation cartésienne :

$$ax + b.y + c.z + d = 0$$

de plus $\vec{n}(a; b; c)$ est normal à $(\mathcal{P})$.

★ **Exemple :** (Q) $x + 10y - 7 = 0$

(Q) est un plan et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\10\\0\end{pmatrix}$ est normal à (Q).

Prop : Soient $(\mathcal{P})$ et (Q) deux plan d'équations : $(\mathcal{P})$ $ax+by+cz+d=0$

(Q) $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

on a : $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal à $(\mathcal{P})$

$\vec{n'}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ est normal à (Q).

$(\mathcal{P}) /\!/ (Q) \iff \vec{n} ; \vec{n'}$ colinéaires

$(\mathcal{P}) \perp (Q) \iff \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$

EX.41 On donne les équations cartésiennes de deux plans :

$(\mathcal{P})$: $x - 4y + 7 = 0$

(Q) : $x + 2y - z + 1 = 0$

1°/ Mq $(\mathcal{P})$ et (Q) sont sécantes

2°/ Déterminer un vecteur directeur de la droite d'intersection (D) des plans $(\mathcal{P})$ et (Q).

10 Représentation paramétrique d'un plan dans l'espace :

Un plan $(\mathcal{P})$ est déterminé par :

- un point $A(x_A ; y_A ; z_A) \in (\mathcal{P})$.
- Deux vecteurs directeurs :

$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ et on note : $\mathcal{P}(A ; \vec{u}, \vec{v})$

Déf On appelle représentation paramétrique du plan $(\mathcal{P})$ le système :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases} \quad \text{avec : } (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

$t ; t'$ sont des paramètres.

★ **Exemple** Donner une representation paramétrique de $\mathcal{P}(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ avec :

$A(1 ; 0 ; 0)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-3\\3\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\2\\0\end{pmatrix}$

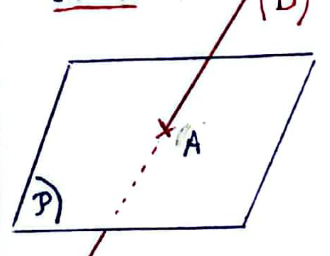
Réponse :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}.t + 7t' \\ y = -3t + 2t' \\ z = 3t' \end{cases} \quad (t ; t') \in \mathbb{R}^2$$

11 Les positions relatives de droites et de plans.

Il y a 3 cas possibles :

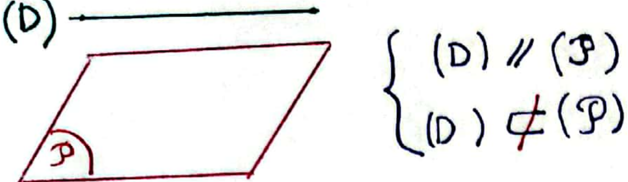
1er cas : (D) et $(\mathcal{P})$ sont sécantes en A :



$(D) \cap (\mathcal{P}) = \{A\}$

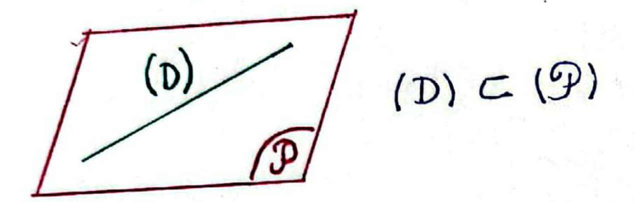
n° 19.

2ème cas : (D) et (P) sont parallèles et (D) n'est pas incluse dans (P) :



$$\begin{cases} (D) \parallel (P) \\ (D) \not\subset (P) \end{cases}$$

3° cas : (D) est incluse dans (P)



$(D) \subset (P)$

EX.5 Déterminer l'intersection de : (D) et (P) où :

$(P) : 3x - y + z - 1 = 0$

et $(D) : \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = -2 + k \\ z = 1 - k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

★ Série d'exercices ★

ex.1 : [BAC .Pro - 2018] (2pt)

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient (D_1) la droite passant par le point $A(1; 2; -1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(-1; 0; -1)$ et (D_2) la droite dont un représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1. Montrer que le point $A(1; 2; -1)$ appartient à (D_2).

2. Donner une équation cartésienne du plan défini par (D_1) et (D_2).

★ ★ ★ ★ ★

ex.2 : [BAC.Pro. Session de rattrapage. 2018] (3pts)

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points $A(1; 1; 0)$; $B(0; -1; 0)$ et $C(-1; 0; 1)$

1-a) Vérifier que : $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\overrightarrow{BC} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

1-b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont linéairement indépendants.

2-a) Vérifier que : $\begin{cases} x = -t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (BC).

et qu'une représentation paramétrique de la droite (OA) est : $\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 0 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

2.b) Montrer que les droites (OA) et (BC) ne sont pas coplanaires

2.c) En déduire sans calcul que B est le seul point d'intersection du plan (OAB) et la droite (BC)

★ ★ ★ ★

ex.3 : Considérons le point $A(4; -1; 2)$ et le plan : $(P) : 2x - y + 3z + 5 = 0$

1°/ Vérifier que : $A \notin (P)$

2°/ Donner deux points $B \in (P)$ et $C \in (P)$.

3°/ Donner deux vecteurs directeurs de (P) puis une représentation paramétrique du plan (P)

4°/ Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) puis celle de (AC).

★ Bon courage !!

Scanné avec CamScanner